Государственное образовательное учреждение
Высшее профессиональное образование
Донской государственный технический университет
кафедра ПОВТ и АС

Отчет по курсовой работе
по курсу «Алгоритмы, построение и анализ»
на темы«Алгоритмы нахождения кратчайших путей в графе.»

Выполнил ст. гр. УСУ-21
Герусов К.А.
Руководитель работы:
Горлова М.Ю.
Медведева Т.А.

Ростов-на-Дону
2010г.

СОДЕРЖАНИЕ.

ВВЕДЕНИЕ.

Граф - исключительно популярный объект, минимально удаленный как от своего целостного пространственного образа, так и от описания по всем правилам теории множеств. Всякий раз, когда с задачей удается связать граф, обсуждение резко упрощается и большие фрагменты словесного описания заменяются манипуляциями с картинками.

Ю.И.Манин.

Многосвязная структура характеризуется следующими свойствами: (1) каждый элемент структуры содержит произвольное число направленных связей с другими элементами (или ссылок на другие элементы); (2) с каждым элементом может связываться произвольное количество других элементов (каждый элемент может быть объектом ссылки произвольного количества других элементов); (3) каждая связь в структуре имеет не только направление, но и вес. Такую многосвязную структуру называют сетевой структурой или сетью. Заметим, что логически сеть эквивалентна взвешенному ориентированному графу общего вида, и поэтому вместо термина "сеть" часто употребляются термины "графовая структура", или даже просто "граф".

Особое значение сетевые структуры приобрели в системах искусственного интеллекта, в которых они адекватно отражают логику организации данных и сложные отношения, возникающие в таких системах между различными элементами данных. В этих системах сетевые структуры применяются для построения семантических сетей, фреймов и других логических конструкций, необходимых для представления знаний, образования понятий и осуществления логических выводов.

Кратчайшие пути в графе. Алгоритм Форда-Беллмана.

Мы взбираемся на вершину, откуда можем бросить гордый взгляд назад и оценить пройденный путь.

П.Буль.

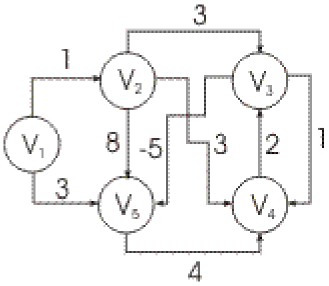
Существует большое количество практических задач, сводящихся к поиску кратчайших путей в графе. К их числу можно отнести: поиск кратчайшего расстояния между городами; поиск пути передачи информации, обеспечивающего минимальную стоимость или минимальное время передачи, или максимальную надежность при распространении информации в разветвленной сети.

Исходными данными для поиска кратчайшего пути в графе является матрица весов дуг заданного ориентированного графа. Это означает, что каждой дуге $(u,v)\in E$ поставлено в соответствие некоторое вещественное число $A(u,v)$, называемое весом данной дуги. Длину кратчайшего пути $d(s,t)$ между вершинами s и t называют расстоянием от s до t (расстояние, определенное таким образом, может быть и отрицательным). Если не существует ни одного пути из s в t, то полагают $d(s,t)=Ґ$, где Ґ- некоторый символ.

Большинство алгоритмов поиска расстояний между двумя фиксированными вершинами s и t включают в себя следующие действия: по данной матрице весов дуг $A[u,v]$ $(u,v\in V)$ вычисляют некоторые верхние ограничения $D[v]$ на расстояние от s до всех вершин v. На каждом шаге, если $D[v]+A[u,v]<D[v]$ оценку $D[v]$ улучшают: $D[v]=D[u]+A[u,v]$. Процесс прекращается, когда дальнейшее улучшение ни одного из ограничений невозможно.

Алгоритм Форда-Беллмана позволяет найти расстояние от источника до всех вершин D[v]=d(s,v), $v \in V$ ориентированного графа при условии, что граф не содержит контуров отрицательной длины (n - количество вершин в графе). Исходными данными для этого алгоритма являются матрица весов дуг A[u,v].

На рисунке 1 приведен: (а) граф; (б) соответствующая ему матрица весов дуг; (в) результаты работы алгоритма Форда-Беллмана.



а

	1	2	3	4	5
1	∞	1	∞	∞	3
2	∞	∞	3	3	8
3	∞	∞	∞	1	-5
4	∞	∞	2	∞	∞
5	∞	∞	∞	4	∞

б

K	D[1]	D[2]	D[3]	D[4]	D[5]
	0	1	∞	∞	3
1	0	1	4	4	-1
2	0	1	4	3	-1
3	0	1	4	3	-1

в

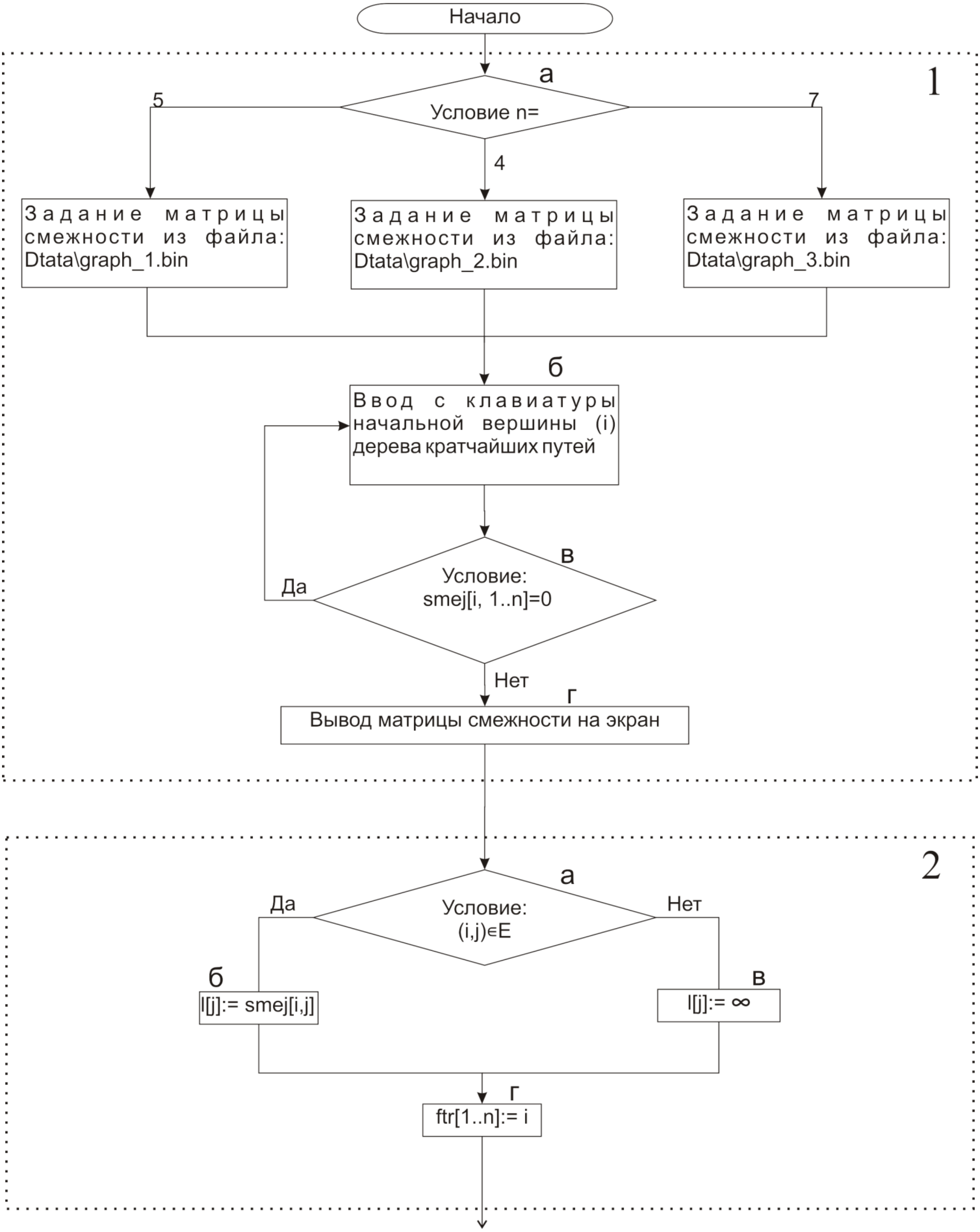
Рис. 1: Пример выполнения алгоритма Форда-Беллмана.

Приведенный алгоритм отыскания кратчайших путей в графах с отрицательными длинами дуг, принадлежащий Форду, Муру и Беллману, может служить одним из возможных способов обнаружения контуров отрицательной длины (или циклов в неориентированном графе).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Даная задачу нужно рассматривать, как задачу оптимизации на графах. Она заключается в составлении программного кода на языке программирования Pascal, основываясь на алгоритме Форда-Беллмана, и её тестирования с ручном просчётом.

АЛГОРИТМИЗАЦИЯ.



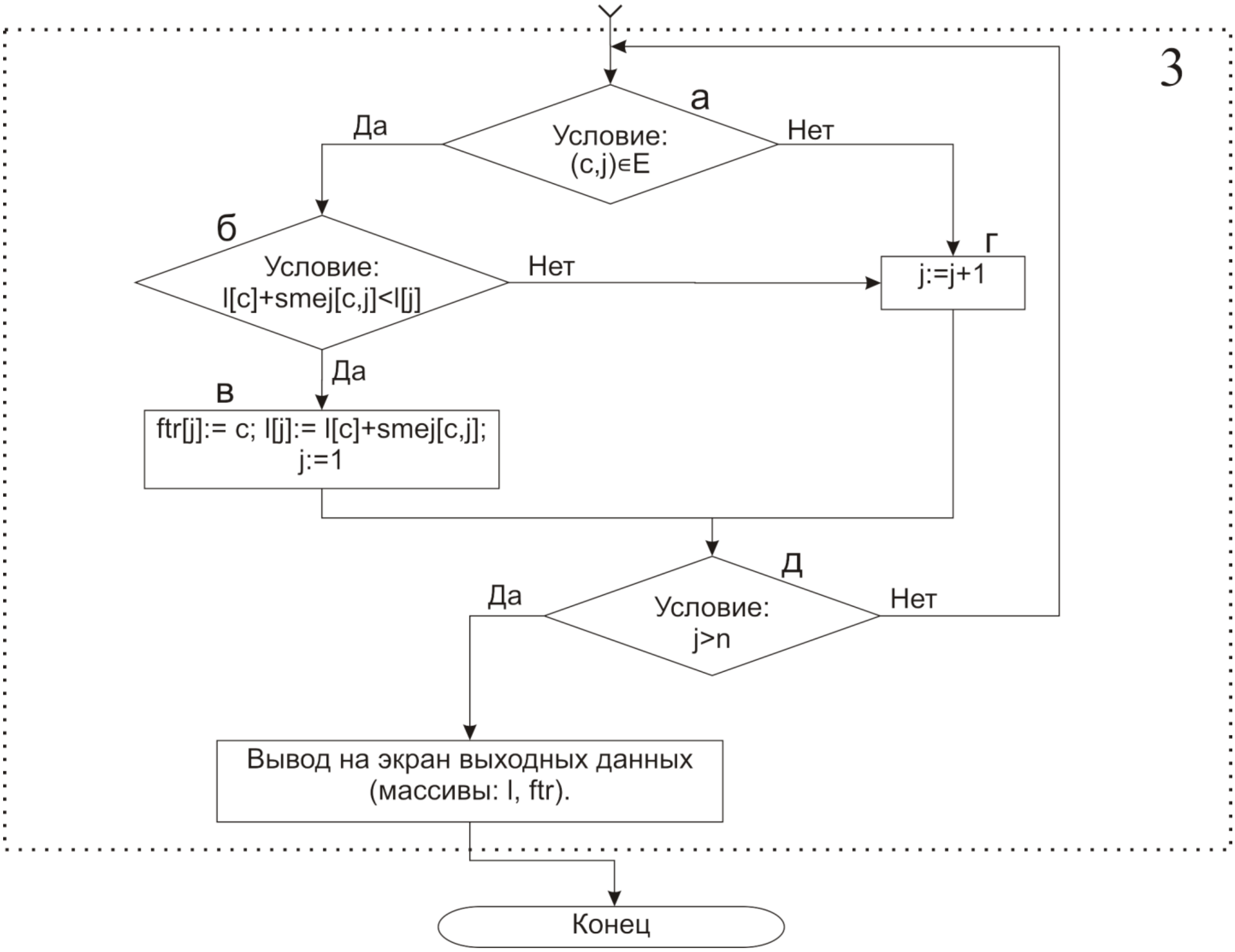


Рис 2: Блок-схема.

Пояснения к блок-схеме.

1. Задание входных данных.

   а) Пользователь вводит число вершин в графе. И в зависимости какое число выбрал пользователь, задается матрица смежности из соответствующего файла.

   б) Программа предлагает ввести начальную вершину i дерева кратчайших путей.

   в) Если в i-ой строке матрицы смежности только 0, то есть из вершины i не выходит ни одной дуги, значит, вершину i нельзя рассматривать как начальную и переходим к пункту б.

   г) Вывод матрицы смежности на экран, в табличном виде.

2. Инициализация выходных данных (массивы: кратчайших путей – l и предков – ftr).

   а) Если существует дуга (i,j), то выполняется пункт б, иначе пункт в.

   б) Расстояние от i до j – вес дуги (i,j).

   в) Расстояние от i до j – бесконечно велико.

   г) Предком всех вершин графа становиться начальная вершина i.

3. Построение дерева кратчайших путей в графе.

   а) Если существует дуга (c,j), то существует путь i->c->j.

   б) Если весовая величина пути i->c->j меньше уже установленного расстояния от вершины i до j, то выполняется пункт в, иначе к пункту г.

   в) Предком вершины j становится промежуточная вершина c, а расстояние от i до j сумма весов дуг пути i->c->j.

   г) Для рассмотрения берётся следующая после вершина после вершины j – j+1.

   д) Если все вершины занесены в дерево, то производится вывод на экран выходных данных, если нет, то происходит переход к пункту а.

ВЫПОЛНЕНИЕ ПОСТАВЛЕНОЙ ЗАДАЧИ.

Ручной просчет.

Даны 3 ориентированных графа $G_1(5,12)$, $G_2(4,7)$, $G_3(7,14)$, заданные матрицами смежности. Построить для этих графов деревья кратчайших путей.

Матрица смежности графа G_1:

0 6 7 7 2
0 0 3 8 -3
0 -1 0 0 -4
0 0 -3 0 9
0 0 7 0 0

Массив предков:
ftr = (0, 3, 4, 1, 3).
Массив расстояний от 1-ой начальной вершины до остальных:
l = (0, 3, 4, 7, 0).

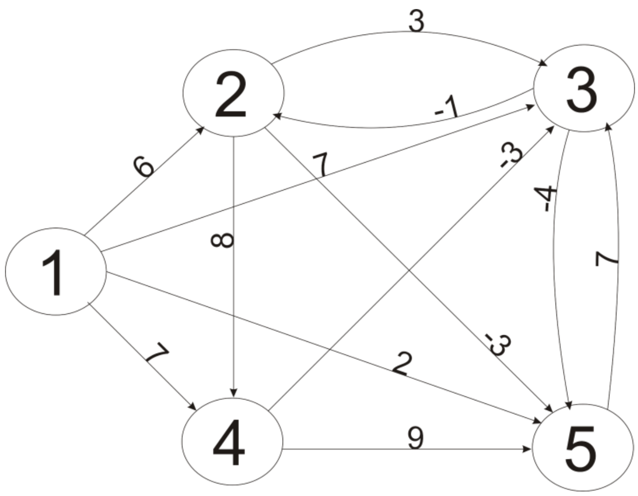


Рис. 3: Граф G_1.

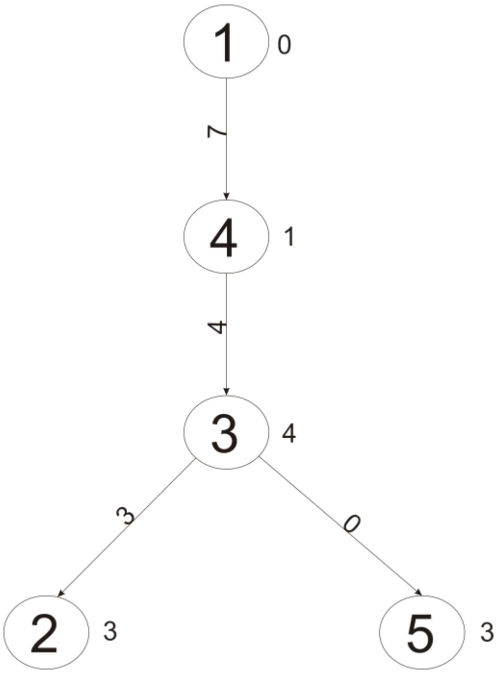


Рис. 4: Дерево кратчайших путей для графа G_1.

Матрица смежности графа G_2:

0 7 0 5
4 0 3 -1
-2 0 0 -6
0 0 0 0

Массив предков:
ftr = (0, 1, 2, 3).
Массив расстояний от 1-ой начальной вершины до остальных:

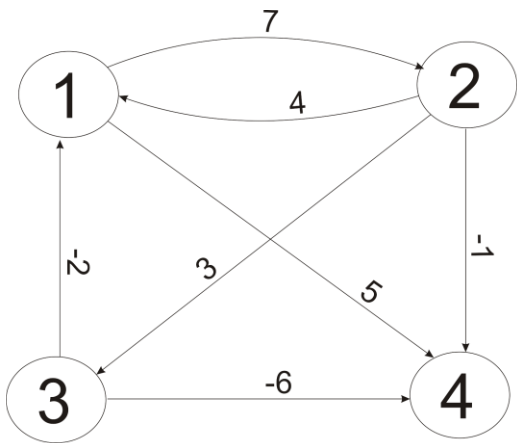


Рис. 5: Граф G_2.

l = (0, 7, 10, 4).

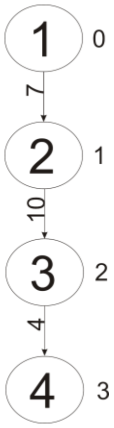


Рис. 6: Дерево кратчайших путей для графа G_2.

Матрица смежности графа G_3:

0	5	0	0	1	0	3
0	0	4	0	7	0	0
0	-4	0	0	-3	0	0
0	0	2	0	0	8	0
0	0	0	2	0	3	0
3	0	0	4	0	0	0
0	0	0	0	0	-1	0

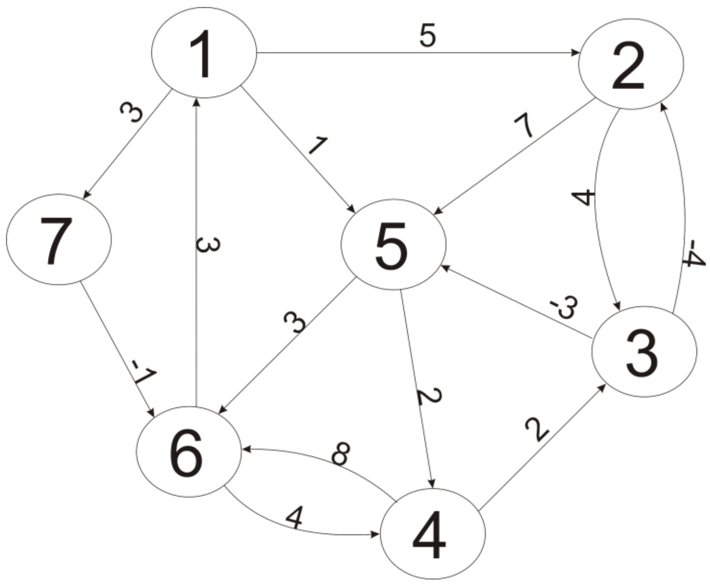


Рис. 7: Граф G_3.

Массив предков:
ftr = (0, 3, 4, 5, 1, 7, 1).
Массив расстояний от 1-ой начальной вершины до остальных:
l=(0,1, 5, 3, 1, 2, 1).

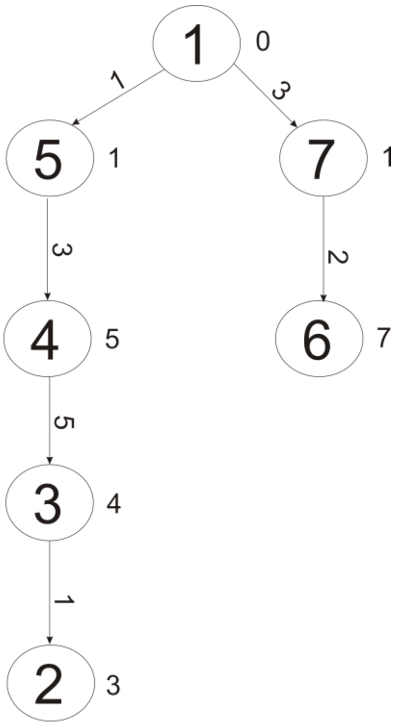
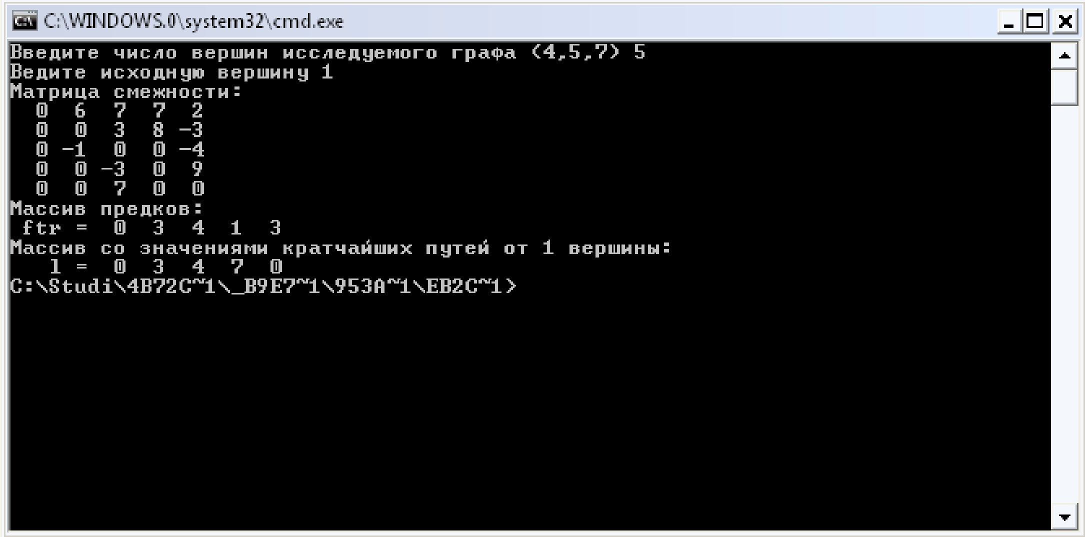


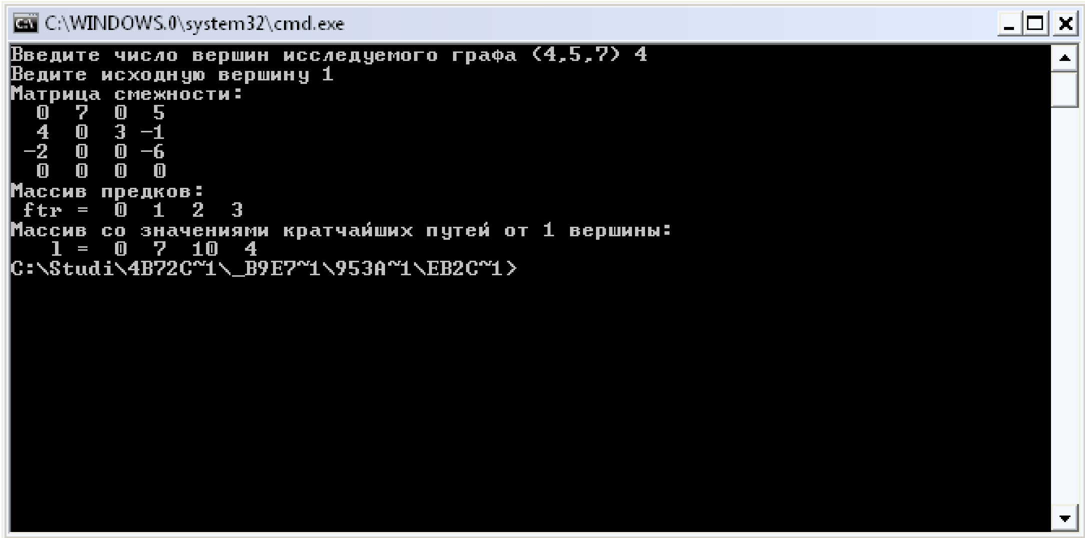
Рис. 8: Дерево кратчайших путей для графа G_3.

Тест программы.



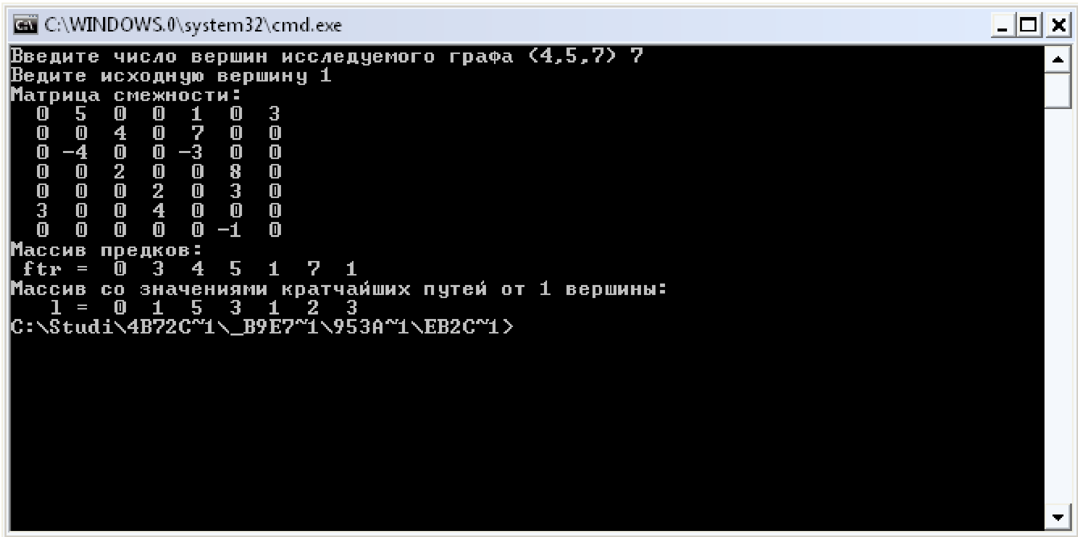
```
Введите число вершин исследуемого графа (4,5,7) 5
Ведите исходную вершину 1
Матрица смежности:
  0  6  7  7  2
  0  0  3  8 -3
  0 -1  0  0 -4
  0  0 -3  0  9
  0  0  7  0  0
Массив предков:
 ftr =  0  3  4  1  3
Массив со значениями кратчайших путей от 1 вершины:
   1 =  0  3  4  7  0
C:\Studi\4B72C~1\_B9E7~1\953A~1\EB2C~1>
```

Рис. 9: Выполнение программы для графа G_1.



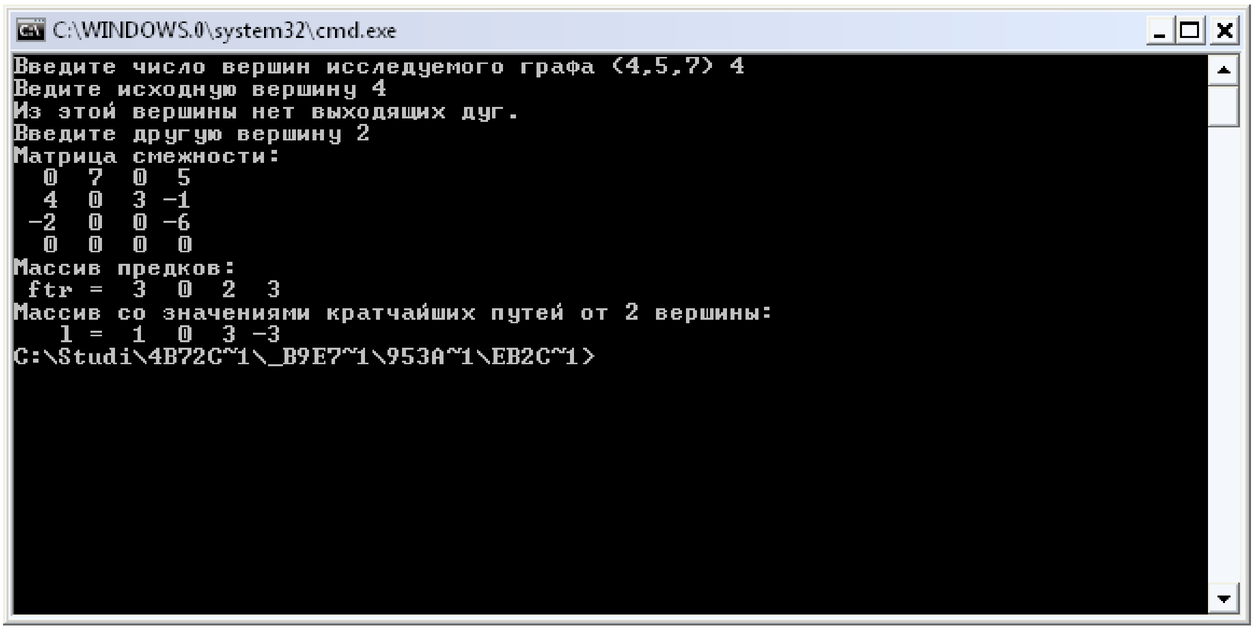
```
Введите число вершин исследуемого графа (4,5,7) 4
Ведите исходную вершину 1
Матрица смежности:
  0  7  0  5
  4  0  3 -1
 -2  0  0 -6
  0  0  0  0
Массив предков:
 ftr =  0  1  2  3
Массив со значениями кратчайших путей от 1 вершины:
   1 =  0  7  10  4
C:\Studi\4B72C~1\_B9E7~1\953A~1\EB2C~1>
```

Рис. 10: Выполнение программы для графа G_2.



```
Введите число вершин исследуемого графа (4,5,7) 7
Ведите исходную вершину 1
Матрица смежности:
  0  5  0  0  1  0  3
  0  0  4  0  7  0  0
  0 -4  0  0 -3  0  0
  0  0  2  0  0  8  0
  0  0  0  2  0  3  0
  3  0  0  4  0  0  0
  0  0  0  0  0 -1  0
Массив предков:
 ftr =  0  3  4  5  1  7  1
Массив со значениями кратчайших путей от 1 вершины:
   1 =  0  1  5  3  1  2  3
C:\Studi\4B72C~1\_B9E7~1\953A~1\EB2C~1>
```

Рис. 11: Выполнение программы для графа G_3.



```
C:\WINDOWS.0\system32\cmd.exe
Введите число вершин исследуемого графа (4,5,7) 4
Ведите исходную вершину 4
Из этой вершины нет выходящих дуг.
Введите другую вершину 2
Матрица смежности:
  0  7  0  5
  4  0  3 -1
 -2  0  0 -6
  0  0  0  0
Массив предков:
 ftr =  3  0  2  3
Массив со значениями кратчайших путей от 2 вершины:
   l =  1  0  3 -3
C:\Studi\4B72C~1\_B9E7~1\953A~1\EB2C~1>
```

Рис. 12: Выполнение программы для графа G_2.

В графе G_2 есть вершина, из которой нельзя построить дерево кратчайших путей – это 4 вершина, так как из неё не выходят дуги. Программа проводит проверку на заданную пользователем вершину, в нашем случае 4, и проводит проверку и обнаруживает, что 4 не подходит. Далее программа вновь предлагает ввести номер вершины и для введенной 2 успешно вычисляет выходные массивы. Правильность данных можно проверить, сверив их с деревом кратчайших путей для графа G_2 с начальной 2 вершиной на рисунке 13.

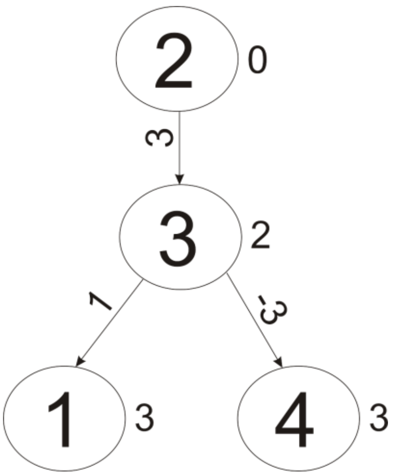


Рис. 13: Дерево кратчайших путей для графа G_2 с начальной вершиной №2.

КОД ПРОГРАММЫ.

```
program kurs;
uses crt;
const m=10;
type matrix= array [1..m, 1..m] of integer;
     massiv= array [1..m] of integer;
var i,j,min,c,k,s,n: integer;
    v,l,ftr: massiv;
    smej: matrix;
    f: file of integer;
label metka;
procedure vvod1(n: integer; var smej: matrix);
 begin
  assign(f,'data/graph_1.bin');
   reset(f);
   for i:=1 to n do
    for j:=1 to n do
     begin
      read(f,c);
      smej[i,j]:=c;
     end;
  close(f);
end;
procedure vvod2(n: integer; var smej: matrix);
 begin
  assign(f,'data/graph_2.bin');
   reset(f);
   for i:=1 to n do
    for j:=1 to n do
     begin
      read(f,c);
      smej[i,j]:=c;
     end;
  close(f);
end;
procedure vvod3(n: integer; var smej: matrix);
 begin
  assign(f,'data/graph_3.bin');
   reset(f);
   for i:=1 to n do
    for j:=1 to n do
     begin
      read(f,c);
      smej[i,j]:=c;
     end;
  close(f);
end;
Begin clrscr;
write('Введите число вершин исследуемого графа (4,5,7) ');
```

```
read(n);
case n of
 5: vvod1(n,smej);
 4: vvod2(n,smej);
 7: vvod3(n,smej);
end;
write('Ведите исходную вершину ');
metka: read(i);
s:=0;
for k:=1 to n do
 if not(smej[i,k]=0) then s:=1;
if s=0 then
 begin
  writeln('Из этой вершины нет выходящих дуг.');
  write('Введите другую вершину ');
  goto metka
 end;
writeln('Матрица смежности: ');
for k:=1 to n do begin
for s:=1 to n do
 if smej[k,s]<0 then
  write(' ',smej[k,s])
 else
  write('  ',smej[k,s]);
writeln;
end;
for j:=1 to n do begin
  l[j]:=smej[i,j];
  ftr[j]:=i;
 if l[j]=0 then l[j]:=99;
end;
l[i]:=0;
for j:=1 to n do begin
min:=l[j];
for k:=1 to n do
 if not(smej[k,j]=0) and not(k=i) then
  if smej[k,j]<min then
   begin
    c:= k;
    min:=smej[k,j];
   end;
v[j]:= l[c]+smej[c,j];
if v[j]<l[j] then
  begin
   l[j]:=v[j];
   ftr[j]:=c;
   j:=1;
   end;
End;
```

```
ftr[i]:=0; l[i]:=0;
writeln('Массив предков: ');
write(' ftr =');
for k:= 1 to n do
 write('  ',ftr[k]);
writeln;
writeln('Массив со значениями кратчайших путей от ',i,' вершины: ');
write('   l =');
for k:=1 to n do
 if l[k]<0 then
  write(' ',l[k])
 else
  write('  ',l[k]);
End.
```

ПРИЛОЖЕНИЕ.

Коды программ используемые для создания файлов с данными.

Для 1-го графа.

```
program graph1;
uses crt;
const n=5;
type matrix= array [1..n, 1..n] of integer;
var i,j,c,n: integer;
    smej: matrix;
    f: file of integer;
Begin clrscr;
smej[1,2]:=6; smej[1,3]:=7; smej[1,4]:=7; smej[1,5]:=2;
smej[2,3]:=3; smej[2,4]:=8; smej[2,5]:=-3;
smej[3,2]:=-1; smej[3,5]:=-4;
smej[4,3]:=-3; smej[4,5]:=9;
smej[5,3]:=7;
assign(f,'data/graph_1.bin');
 rewrite(f);
 for i:=1 to n do
  for j:=1 to n do
   begin
    c:=smej[i,j];
    write(f,c);
   end;
close(f);
End.
```

Для 2-го графа.

```
program graph2;
uses crt;
const n=4;
type matrix= array [1..n, 1..n] of integer;
var i,j,c,n: integer;
    smej: matrix;
    f: file of integer;
Begin clrscr;
smej[1,2]:=7; smej[1,4]:=5;
smej[2,1]:=4;smej[2,3]:=3; smej[2,4]:=-1;
smej[3,1]:=-2; smej[3,4]:=-6;
assign(f,'data/graph_2.bin');
 rewrite(f);
 for i:=1 to n do
  for j:=1 to n do
   begin
    c:=smej[i,j];
    write(f,c);
   end;
close(f);
End.
```

Для 3-го графа.

```
program kurs;
uses crt;
const n=7;
type matrix= array [1..n, 1..n] of integer;
var i,j,c,n: integer;
    smej: matrix;
    f: file of integer;
Begin clrscr;
smej[1,2]:=5; smej[1,5]:=1; smej[1,7]:=3;
smej[2,3]:=4; smej[2,5]:=7;
smej[3,2]:=-4; smej[3,5]:=-3;
smej[4,3]:=2; smej[4,6]:=8;
smej[5,4]:=2; smej[5,6]:=3;
smej[6,1]:=3; smej[6,4]:=4;
smej[7,6]:=-1;
assign(f,'data/graph_3.bin');
 rewrite(f);
 for i:=1 to n do
  for j:=1 to n do
   begin
    c:=smej[i,j];
    write(f,c);
   end;
close(f);
End.
```

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

В.Н. Землянухин, Л.Н. Землянухина – Задачи оптимизации на графах. 2009г.

А.Е. Костин, В.Ф. Шаньгин – Организация и обработка структур данных в вычислительных системах. Учебное пособие для вузов. 1987г.

Ж. Трамбле, П. Соренсон – Введение в структуры данных. 1982г.

Ф. Харари – Теория графов. 1973г.

В. Липский – Комбинаторика для программистов. 1988г.

В.Л. Бурковский, Л.В. Холопкина, Н.Л. Райхель, О.Я. Кравец – Методы моделирования и анализа вычислительных систем. Учебное пособие. 1996г.

В.А. Евстигнеев, В.Н. Касьянов – Графы в программировании: обработка, визуализация и применение.